В вариант включается одна из двух задач 10.2 и 10.3.

М10.1-1 Является ли число $1 + (5 + 10^{2024})(1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{2023})$ полным квадратом?
М10.1-2 Является ли число $1 + (5 + 13^{2024})(1 + 13 + 13^2 + \ldots + 13^{2023})$ полным квадратом?

Ответ. Да, является.

Решение варианта 1. Обозначим $10^{2024} = t$. После использования формулы суммы геометрической прогрессии получаем, что число равно $1 + (t+5)(t-1)/9 = \left(\dfrac{t+2}{3}\right)^2$. Остаётся заметить, что $t + 2 = 10^{2024} + 2$ делится на 3, поскольку 10^k имеет остаток 1 при делении на 3 при любом натуральном k.
Комментарий. Не проверена делимость $t + 2$ на 3 — снять 2 балла.
Ошибка в формуле суммы геометрической прогрессии — 0 баллов за задачу.

М10.2-1 В классе учится 33 человека, 7 из них — отличники. Найдите количество способов рассадить в аудитории 12 человек на первый ряд так, чтобы все отличники оказались на этом ряду. Все 12 мест на первом ряду различны.
М10.2-2 В классе учится 31 человек, 6 из них — отличники. Найдите количество способов рассадить в аудитории 10 человек на первый ряд так, чтобы все отличники оказались на этом ряду. Все 10 мест на первом ряду различны.

Ответ. Вариант 1: $\dfrac{12!\cdot 26!}{5!\cdot 21!}$, вариант 2: $\dfrac{10!\cdot 27!}{4!\cdot 23!}$.
Решение. Количество способов выбрать из 12 мест 7 и рассадить отличников на эти места равно $C_{12}^7\cdot 7!$. Остаётся рассадить на оставшиеся $12 - 7 = 5$ мест 5 человек из оставшихся: это можно сделать $\dfrac{(33-7)!}{(33-12)!}$ способами. В итоге получаем ответ: $\dfrac{12!}{(12-7)!}\cdot\dfrac{(33-7)!}{(33-12)!} = \dfrac{12!\cdot 26!}{5!\cdot 21!}$.
Комментарий. Комбинаторная ошибка — 0 баллов за задачу.
Ответ не доведён до числа — баллы не снимаются.

М10.3-1 Среди натуральных чисел 1, 2, 3, …, 2333 найдите количество взаимно простых с 2334.
Указание. Число 389 — простое.
М10.3-2 Среди натуральных чисел 1, 2, 3, …, 2405 найдите количество взаимно простых с 2406.
Указание. Число 401 — простое.

Ответ. Вариант 1: 776, вариант 2: 800.

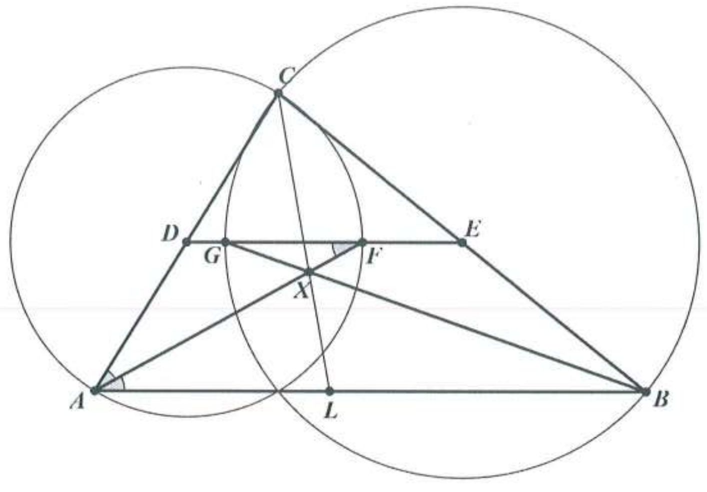
Решение варианта 1. Найдем сначала количество чисел, не взаимно простых с 2334. Так как $2334 = 2\cdot 3\cdot 389$, общий делитель с 2334 имеют те и только те числа, которые делятся хотя бы на одно из чисел 2, 3, 389. Чисел, делящихся на 2, будет $2334/2 = 1167$, делящихся на 3 — 778, делящихся на 389 – 6. При этом мы дважды посчитали числа, делящиеся на $2\cdot 3$ (их 389), делящиеся на $2\cdot 389$ (их 3) и делящиеся на $3\cdot 389$ (их 2). А число $2\cdot 3\cdot 389$ мы посчитали трижды. Поэтому не взаимно простых с 2334 чисел будет $1167+778+6-389-3-2+1 = 1558$. А взаимно простых $2334 - 1558 = 776$.

Комментарий. Комбинаторная ошибка — 0 баллов за задачу.

М10.4-1 На сторонах AC и BC треугольника ABC как на диаметрах построены окружности с центрами D и E соответственно, пересекающие отрезок DE в точках F и G (F лежит ближе к E). Прямые AF и BG пересекаются в точке X. Найдите длину отрезка CX, если $AC = 6$, $BC = 7$, $AB = 8$.

M10.4-2 На сторонах AC и BC треугольника ABC как на диаметрах построены окружности с центрами D и E соответственно, пересекающие отрезок DE в точках F и G (F лежит ближе к E). Прямые AF и BG пересекаются в точке X. Найдите длину отрезка CX, если $AC = 4$, $BC = 5$, $AB = 6$.

Ответ. Вариант 1: $\sqrt{10}$; вариант 2: 2.



Решение. Поскольку $DF = DA$, треугольник ADF равнобедренный. Средняя линия DE параллельна стороне AB треугольника ABC, откуда $\angle AFD = \angle FAB = \angle DAF$, а значит, AF — биссектриса треугольника ABC. Аналогично и BG является биссектрисой. Итак, остаётся вычислить расстояние от вершины C до точки пересечения биссектрис X. Пусть CL — биссектриса треугольника ABC. Тогда из треугольника ACL по теореме о биссектрисе нетрудно получить соотношение

$$\frac{CX}{XL} = \frac{CA}{AL} = \frac{AC+CB}{AB}.$$

Поэтому $CX = \dfrac{CA+CB}{CA+CB+BA}CL = \dfrac{CA+CB}{CA+CB+BA} \cdot \sqrt{AC \cdot CB - AL \cdot BL}.$

M10.5-1 Докажите, что число $\sqrt[20]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[20]{3-2\sqrt{2}}$ является корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами.

M10.5-2 Докажите, что число $\sqrt[30]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[30]{3-2\sqrt{2}}$ является корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами.

Решение. Покажем, что дробь q^n+q^{-n} можно представить многочленом T от $q+q^{-1}$. Рассмотрим многочлены T_n, которые строятся по правилу $xT_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)$, и проверим, что они подходят:

$$\left(q+\frac{1}{q}\right)\left(q^n+\frac{1}{q^n}\right) = q^{n+1} + \frac{1}{q^{n+1}} + q^{n-1} + \frac{1}{q^{n-1}}.$$

Теперь нужно рассмотреть (при $n = 20$ для варианта 1 и $n = 30$ для варианта 2) многочлен $T_n(x) = q^n + q^{-n}$ (от переменной $x = q + q^{-1}$). Подставим $q = \sqrt[n]{3+2\sqrt{2}}$ и получим $T_n(x) = 6$. Многочлен $T_n(x) - 6$ имеет нужный корень.

Межвузовский центр воспитания и развития талантливой молодежи в области естественно-математических наук «Физтех-Центр»