В вариант включается одна из двух задач 11.2 и 11.3.

M11.1-1 Найдите все пары натуральных чисел m и n таких, что $\dfrac{m}{n}=\dfrac{2\sqrt{2}+2\sqrt{10}}{5\sqrt{3+\sqrt{5}}}$.

M11.1-2 Найдите все пары натуральных чисел m и n таких, что $\dfrac{m}{n}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{5\sqrt{4+\sqrt{7}}}$.

Ответ. Вариант 1: $m=4$, $n=5$; вариант 2: $m=2$, $n=5$.

Решение. После возведения в квадрат дроби из правой части несложно получить, что $\dfrac{m^2}{n^2}$ равно $\dfrac{16}{25}$ (в варианте 1) и $\dfrac{4}{25}$ (в варианте 2).
Комментарий. Ответ без обоснования — 0 баллов за задачу.

M11.2-1 Решите уравнение $1+\cos(x+3\operatorname{tg}x)+(\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2 x)^2=0$.
M11.2-2 Решите уравнение $\left|1+\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+2\operatorname{ctg}x\right)\right|+(\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}^2 x)^2=0$.

Ответ. Вариант 1: $x=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; вариант 2: $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Решение варианта 1. Уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases}1+\cos(x+3\operatorname{tg}x)=0\\ \operatorname{tg}x=\operatorname{tg}^2 x,\end{cases}$$

то есть $\operatorname{tg}x=1$ или $\operatorname{tg}x=0$. В первом случае из первого уравнения $x=-3+\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, что противоречит равенству $\operatorname{tg}x=1$. Во втором случае из первого уравнения $x=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, причем при всех этих значениях x равенство $\operatorname{tg}x=0$ также выполнено. Итак, ответ $x=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.
В варианте 2 либо $\operatorname{ctg}x=0$, либо $\operatorname{ctg}x=-1$. Второй случай невозможен, поскольку $\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}-2\right)=$ $=1$. В первом случае $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=-1$, и подходят значения $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.
Комментарий. Неверно решено элементарное тригонометрическое уравнение — не более 2 баллов за задачу.
Ошибка в тригонометрической формуле — 0 баллов за задачу.

M11.3-1 Углы α и β треугольника ABC таковы, что

$$\begin{cases}3\sin\alpha+4\cos\beta=6,\\ 4\sin\beta+3\cos\alpha=1.\end{cases}$$

Вычислите косинус третьего угла треугольника.
M11.3-2 Углы α и β треугольника ABC таковы, что

$$\begin{cases}3\sin\alpha+2\cos\beta=3\sqrt{2},\\ 2\sin\beta+3\cos\alpha=1.\end{cases}$$

Вычислите косинус третьего угла треугольника.

Ответ. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Решение варианта 1. Пусть γ — третий угол треугольника. Возведём оба равенства в квадрат и сложим: получим $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}$. Значит, либо $\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, либо $\cos\gamma=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Остаётся

заметить, что если $\gamma = 150^\circ$, то угол α меньше 30°, а значит, $3\sin\alpha + 4\cos\beta < \frac{3}{2} + 4 < 6$. Поэтому $\gamma = 30^\circ$, $\cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

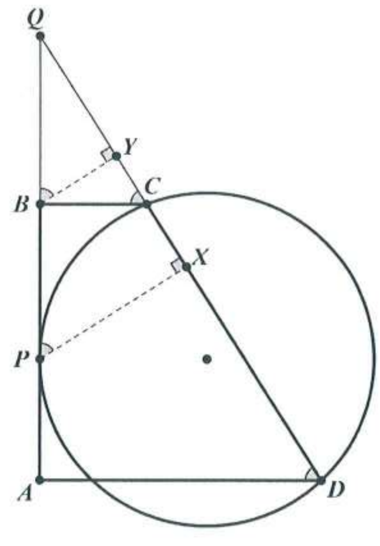
М11.4-1 25 мужчин и 25 женщин сели за круглый стол. Могло ли так оказаться, что у каждого человека хотя бы один из соседей — мужчина?
М11.4-2 27 мужчин и 27 женщин сели за круглый стол. Могло ли так оказаться, что у каждого человека хотя бы один из соседей — мужчина?

Ответ. Не могло.

Решение варианта 1. Предположим, что требуемое возможно. Тогда мужчины сидят подряд хотя бы по двое, а женщины — не более чем по двое. Значит, групп сидящих подряд женщин не менее 25/2, т. е. не менее 13, и между любыми двумя группами сидят хотя бы два мужчины. В таком случае мужчин должно быть не менее $2 \cdot 13$, а суммарное число мужчин и женщин превосходит 25.

М11.5-1 Окружность проходит через концы C и D боковой стороны CD прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle A = 90^\circ$) и касается её второй боковой стороны AB в точке P. Найдите расстояние от точки P до прямой CD, если основания AD и BC трапеции равны 2 и 1 соответственно.
М11.5-2 Окружность проходит через концы C и D боковой стороны CD прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle A = 90^\circ$) и касается её второй боковой стороны AB в точке P. Найдите расстояние от точки P до прямой CD, если основания AD и BC трапеции равны 3 и 1 соответственно.

Ответ. Вариант 1: $\sqrt{2}$, вариант 2: $\sqrt{3}$.



Решение. Пусть $BC = x$, $AD = y$. Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения в точке Q, а также обозначим через X и Y проекции точек P и B на прямую QD и угол QCB через α. Из подобия треугольников QBY и QPX получаем $PX = BY \cdot \frac{PQ}{BQ}$. Выразим все входящие в правую часть отрезки через x, y и α:

$$BY = x\sin\alpha, \quad BQ = x\,\mathrm{tg}\,\alpha, \quad PQ = \sqrt{QC \cdot QD} = \sqrt{\frac{x}{\cos\alpha} \cdot \frac{x}{\cos\alpha}} = \frac{\sqrt{xy}}{\cos\alpha}.$$

Подстановка этих выражений приводит к равенству $PX = \sqrt{xy}$.

Межвузовский центр воспитания и развития талантливой молодежи в области естественно-математических наук «Физтех-Центр»

Материалы данного конкурса доступны для свободного некоммерческого использования (при использовании ссылка на источник обязательна).

© Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), 2023-2024.