В вариант включается одна из двух задач 9.3 и 9.4.

М9.1-1 Числа a, b и c удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{1+c} = \dfrac{c-c^2-1}{ab-a^2-b^2}, \\ \dfrac{b-a}{c-2} = \dfrac{2c+c^2+4}{ab+a^2+b^2}. \end{cases}$$

Найдите a.

М9.1-2 Числа a, b и c удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \dfrac{1+2c}{4a+4b} = \dfrac{2ab-2a^2-2b^2}{2c-4c^2-1}, \\ \dfrac{1/2-c}{a-b} = \dfrac{ab+a^2+b^2}{1/4+c^2+c/2}. \end{cases}$$

Найдите a.

Ответ. Вариант 1: $a = \sqrt[3]{9/2}$; вариант 2: $1/2$.

Решение варианта 1. Умножим оба равенства на знаменатели левых и правых частей и получим $a^3+b^3 = 1+c^3$ и $a^3-b^3 = 8-c^3$. Сложив эти равенства, найдем $a^3 = 9/2$, $a = \sqrt[3]{9/2}$.

М9.2-1 Найдите корни уравнения $x^2+(a-1)\cdot x+(3011-a) = 0$, если известно, что значение параметра a выбрано таким образом, что эти корни — целые числа.

Указание. Число 3011 — простое.

М9.2-2 Найдите корни уравнения $x^2+(a-1)\cdot x+(2207-a) = 0$, если известно, что значение параметра a выбрано таким образом, что эти корни — целые числа.

Указание. Число 2207 — простое.

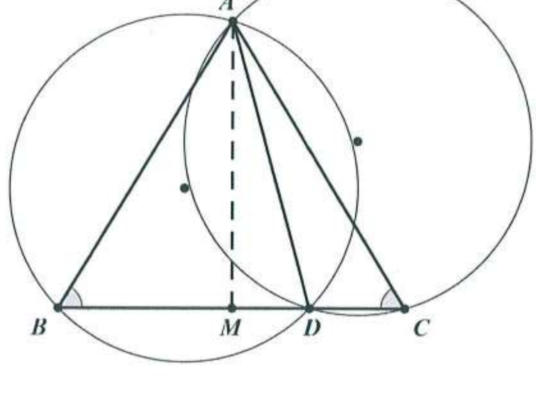
Ответ. Вариант 1: $\{2, 3012\}$ или $\{0, -3010\}$, вариант 2: $\{2, 2208\}$ или $\{0, -2206\}$.

Решение варианта 1. Пусть x_1 и x_2 — искомые корни уравнения. По теореме Виета $3010 = -x_1-x_2+x_1x_2$, откуда $(x_1-1)(x_2-1) = 3011$. Поэтому корни — либо пара $\{2, 3012\}$, либо $\{0, -3010\}$.

М9.3-1 Точка D выбрана на стороне BC треугольника ABC таким образом, что $BD = 4$, $DC = 2$, $DA = 3$. Найдите площадь треугольника ABC, если описанные окружности треугольников ABD и ACD имеют равные радиусы.

М9.3-2 Точка D выбрана на стороне BC треугольника ABC таким образом, что $BD = 6$, $DC = 2$, $DA = 3$. Найдите площадь треугольника ABC, если описанные окружности треугольников ABD и ACD имеют равные радиусы.

Ответ. Вариант 1: $6\sqrt{2}$, вариант 2: $4\sqrt{5}$.



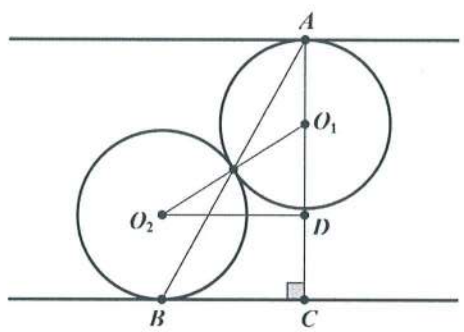
Решение варианта 1. Поскольку описанные окружности треугольников ABD и ACD равны, а AD — их общая хорда, углы ABD и ACD опираются на равные хорды в равных окружностях, а значит, $\angle ABD = \angle ACD$. Итак, треугольник ABC равнобедренный. Его высота AM, проведённая из вершины A, является также медианой, поэтому из треугольника AMD её можно вычислить по теореме Пифагора: $AM = \sqrt{AD^2 - DM^2} = 2\sqrt{2}$. Искомая площадь треугольника равна $\frac{1}{2}AM \cdot BC = 6\sqrt{2}$.

Комментарий. Доказано, что треугольник равнобедренный — 2 балла.

M9.4-1 Две равные окружности ω и Ω касаются внешним образом. К ним проведены две параллельные касательные a и b так, что окружности расположены между ними. Найдите радиус окружностей ω и Ω, если расстояние между прямыми a и b равно 10, а расстояние между точками касания окружностей с прямыми равно 12.

M9.4-2 Две равные окружности ω и Ω касаются внешним образом. К ним проведены две параллельные касательные a и b так, что окружности расположены между ними. Найдите радиус окружностей ω и Ω, если расстояние между прямыми a и b равно 16, а расстояние между точками касания окружностей с прямыми равно 20.

Ответ. Вариант 1: $\frac{18}{5}$, вариант 2: $\frac{25}{4}$.



Решение. Пусть A и B — точки касания окружностей с прямыми, C — проекция A на касательную, содержащую точку B, а O_1 и O_2 — центры окружностей (см. рисунок). Тогда $AB^2 = AC^2 + BC^2$, а квадрат длины BC можно выразить из треугольника O_1O_2D следующим образом:

$$BC^2 = O_2D^2 = 4r^2 - (AC - 2r)^2,$$

где D — проекция O_2 на отрезок AC. Подставив BC^2 в выражение для квадрата AB, получим $AB^2 = 4r \cdot AC$, откуда $r = 4\frac{AC}{AB^2}$.

M9.5-1 Найдите количество положительных несократимых дробей, не превосходящих единицу, у которых произведение числителя и знаменателя равно 19!.

M9.5-2 Найдите количество положительных несократимых дробей, не превосходящих единицу, у которых произведение числителя и знаменателя равно 23!.

Ответ. Вариант 1: 128, вариант 2: 256.

Решение. Несократимость дроби означает, что числитель и знаменатель не содержат в разложении общих простых множителей. Число 19! является произведением простых множителей 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 и 19 в некоторых степенях. Каждый из этих простых множителей должен (в своей максимальной степени) присутствовать либо только в числителе, либо только в знаменателе, т. е. имеется $2^8 = 256$ способов распределить эти простые множители на относящиеся к числителю и к знаменателю. Но ровно половина дробей меньше единицы, поскольку вместе с каждой дробью вида a/b была подсчитана дробь b/a. Поэтому подходят 128 дробей.

Комментарий. Получен вдвое больший ответ — снять 4 балла.

Межвузовский центр воспитания и развития талантливой молодежи в области естественно-математических наук «Физтех-Центр»